Programmation linéaire

2020/2021

Motivation et objectif du cours

Objectif : apprendre à modéliser les problèmes réels et `a résoudre les programmes linéaires.

- De nombreux problèmes réels peuvent être exprimés comme des programmes linéaires.
- Les programmes linéaires peuvent être résolus efficacement par certains algorithmes.

TERMINOLOGIES

1. <u>Introduction à la programmation linéaire</u>

- Est un outil qui permet de :
  - modéliser
  - résoudre toute une classe de problèmes d'optimisation qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

- la programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction à objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires. Elle vise à sélectionner parmi différentes solutions possibles celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé (solution optimale).

- Les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation o`u la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires

2. Domaines d’applications

Les applications industrielles de la programmation linéaire sont très présentes par exemple dans l’agroalimentaire (composition optimale des ingrédients de plats cuisinés, etc.), industrie du fer et de l’acier (composition optimale des aciers), l’industrie du papier (problèmes de découpe), les transports (plan de vols d’avions, minimisation des coûts de transport…) et les réseaux (optimisation des réseaux de communication)…etc.

3. Une inéquation linéaire : est une expression de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b$$

où x_i : sont les variables (inconnus)

a_i : coefficients

b : constante.

4. Un système d' inéquations linéaires

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1n} x_n \leq b1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots a_{mn} x_n \leq bm \end{cases}$$

5. Un programme linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots \quad a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots \quad a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

contraintes

Min ou Max $f(x)$ ← fonction objectif.

On appel fonction objectif , la fonction qui doit être maximiser (minimiser)

$f(x)$ ou $Z= C_1+C_2+\dots\dots C_N$

- **Linéarité :** Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision (les coefficients c_i et a_{ij} des variables sont constants)
- **Continuité :** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linaires

6. Notation matricielle d'un programme linéaire

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \bar{X} = (x_1, \ldots, x_n), \quad C = (c_1, \ldots, c_n)$$

$$PL = \begin{cases} AX \leq b & x_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \text{Min ou Max } Z = CX \end{cases}$$

Modélisation

- Modélisation

La modélisation d'un problème linéaire consiste a identifier:

 les variables.

Les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables.

L'objectif visé (optimisation).

Les étapes de modélisations

- La détermination des variables de décision

les variables $x_1, x_2, \ldots.. X_n$ sont appelées des variables de décision ou variables réelles du problème.

- La détermination des contraintes :

La contrainte peut être assimilée a un obstacle.tel que les limitations techniques scientifiques, économiques, les lois de la nature, les délais, etc.

exemple: $x1+2x2 \leq 10$

$2x1+x2 \leq 5$ **domaine des contraintes**

$3x1+2x2 \leq 12$

avec: $x1 \geq 0\ ;x2 \geq 0$

- La détermination de la fonction objectif (économique)

La fonction objectif (économique) est une fonction qui permet de déterminer l'optimum (max de profit /min des Cout)

La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type:

$$\boldsymbol{Max(ou\ min)z = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_N\, x_N}$$

ou les coefficients $c_1,\ldots,c_N$ *doivent avoir une valeur bien* déterminée et peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Exemple de modélisation d'un problème

- Problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre. La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4$ et 5$.
Le fabricant cherche `a maximiser son profit.

- Sur quelles quantités peut-on travailler ? Choix des inconnues
  - Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts *A et B* produites
  - On parle de variables , on les notera x_A *et* x_B
- Que cherche-t-on `a optimiser ? Fonction objectif
  - On parle de fonction objectif $z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?
  - Première contrainte : 800 Kg de fraises disponible $2x_A + x_B \leq 800$

$$\begin{array}{rrll} 2x_A+ & x_B & \leq 800 & \text{(fraises)} \\ x_A+ & 2x_B & \leq 700 & \text{(lait)} \\ & x_B & \leq 300 & \text{(sucre)} \\ x_A, & x_B & \geq 0 & \text{positivité !} \end{array}$$

- le programme linéaire de problème PL

$$\begin{array}{lrrl} \max & 4x_A+ & 5x_B & \\ & 2x_A+ & x_B & \leq 800 \\ & x_A+ & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$

Exemples simples des programmes non linéaires

$$\begin{array}{rc} \min & \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} \min & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{N}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = x_3 \\ & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

Formes générales d'un programme linéaire

1) Forme canonique mixte

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right].$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ contraintes inégalités : } \forall i \in I_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \bullet \text{ contraintes égalités : } \forall i \in I_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ \bullet \text{ contraintes de signes : } \forall j \in J_1,\ x_j \geq 0 \\ \bullet\ \forall j \in J_2,\ x_j \text{ de signe quelconque.} \end{cases}$$

$I = I_1 \cup I_2$: ens. des indices de contraintes, $\mathrm{card}(I) = m \Rightarrow$ **m contraintes**

$J = J_1 \cup J_2$: ens. des indices des variables, $\mathrm{card}(J) = n \Rightarrow$ **n variables**

Notations

Vecteurs :

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \quad \text{(les inconnues)}$$
$$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$$

Matrice A de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2) Forme canonique pure

Sous cette forme, pas de contraintes d'égalité $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}}$$

3) Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *standard* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}}$$

Variables d''ecarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

Démonstration. *i)* Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b},\ \mathbf{e} \geq \mathbf{0}$$

où $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_m)^\top$ sont appelées *variables d'écart*.

(Réciproque) Soit un PL sous forme standard. On a

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \end{cases}$$

Règles de réécriture

Toute contrainte d'égalité peut s'écrire comme deux inégalités :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \equiv \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \end{cases}$$

Toute contrainte $\geq$ peut s'écrire comme une contrainte $\leq$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \equiv \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leq -b$$

Tout problème de minimisation peut s'écrire comme un problème de maximisation :

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \equiv \min \sum_{i=1}^{n} -c_i x_i$$

Les différentes méthodes pour résoudre un problème linéaire

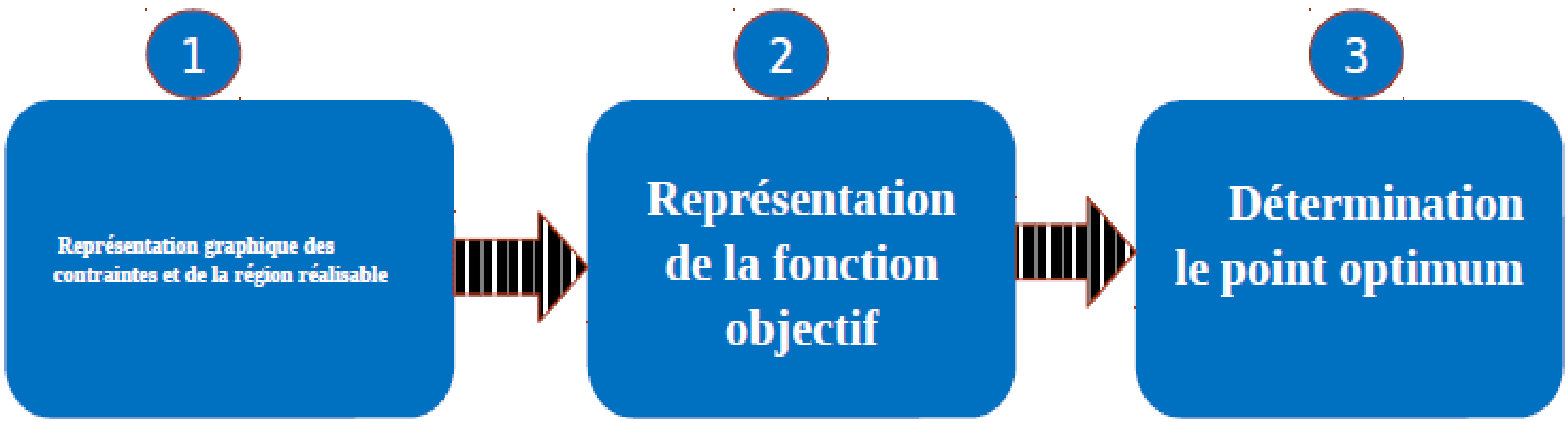
- Il existe plusieurs méthodes pour la résolution d'un problème linéaire
  - Méthode Graphique
  - Méthodes analytique tel que le simplexe , duel

MÉTHODE GRAPHIQUE

l'utilisation de cette méthode est restreinte aux (PL) ayant un nombre de variables au plus égal a 3.
Il existe 2 façon pour résoudre un PL a partir de la méthode graphique:

- la méthode d' énumération des sommets
- la méthode des droits parallèles

Les 3 étapes de Résolution Graphique :



- **la méthode d’énumeration des sommets**:

Dans la méthode d’énumeration des sommets,on se bornera seulement à :

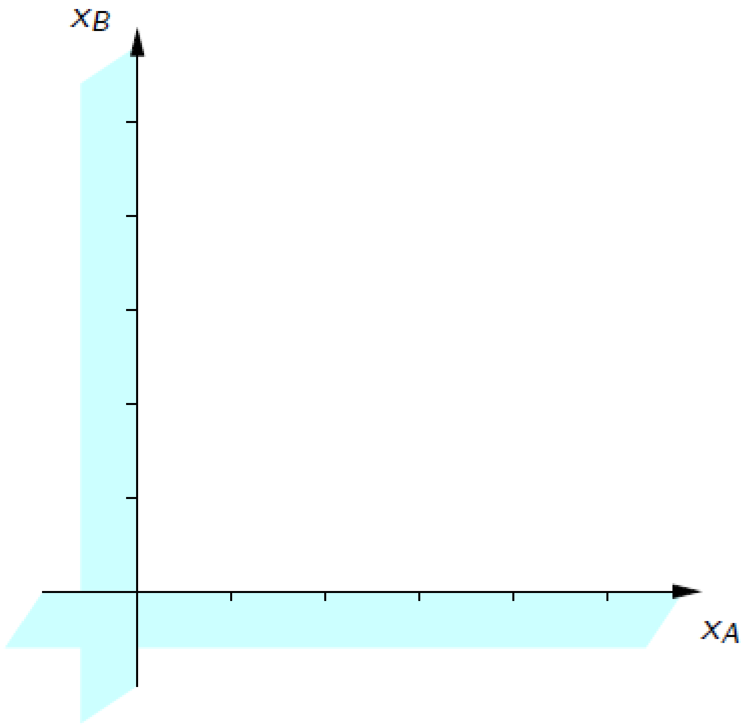
- représenter graphiquement les droites – limites (équations provenant des inéquations de départ) .
- délimiter la frontière de l'enveloppe polygonale, c'est à dire à construire le domaine d'acceptabilité .
- remplacer successivement les coordonnées de chaque sommet du polygone dans la fonction économique afin d'obtenir la combinaison optimale cherchée(minimum ou maximum).

- méthode des droits paralléles:

En général, pour chercher le minimum, on optera pour le point le plus voisin de l'origine, alors que pour le maximum ce sera le point le plus éloigné. On pourra utiliser, à la place de l'énumération de tous les points du polygone d'acceptabilité, le procédé qui consiste à déplacer la droite de la fonction économique parallèlement à son inclinaison à l'origine et en chacun des sommets du domaine d'acceptabilité. Pour le coût, on retiendra la droite la plus voisine de l'origine et pour le maximum, la plus éloignée. Le premier sommet sera le minimum et le dernier atteint le maximum cherché.

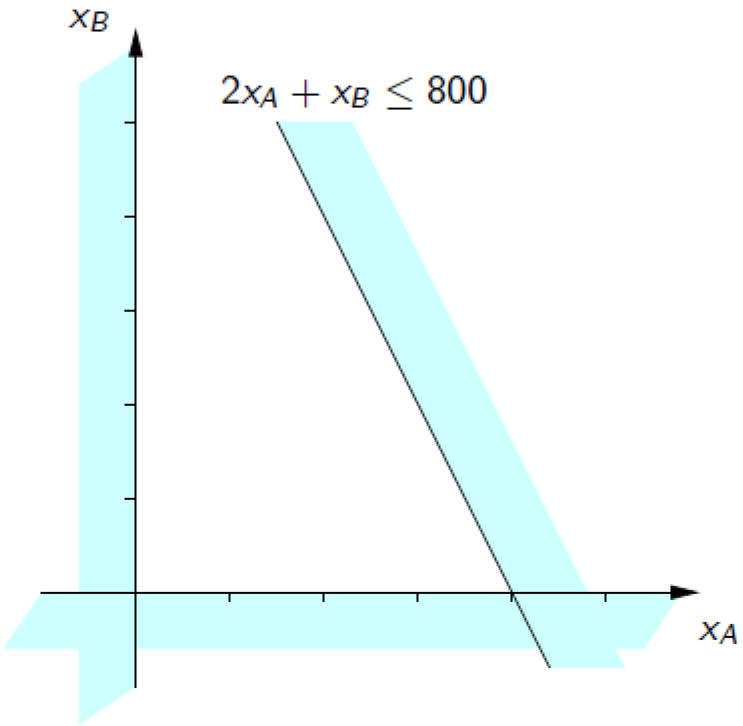
Exemple de la résolution graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



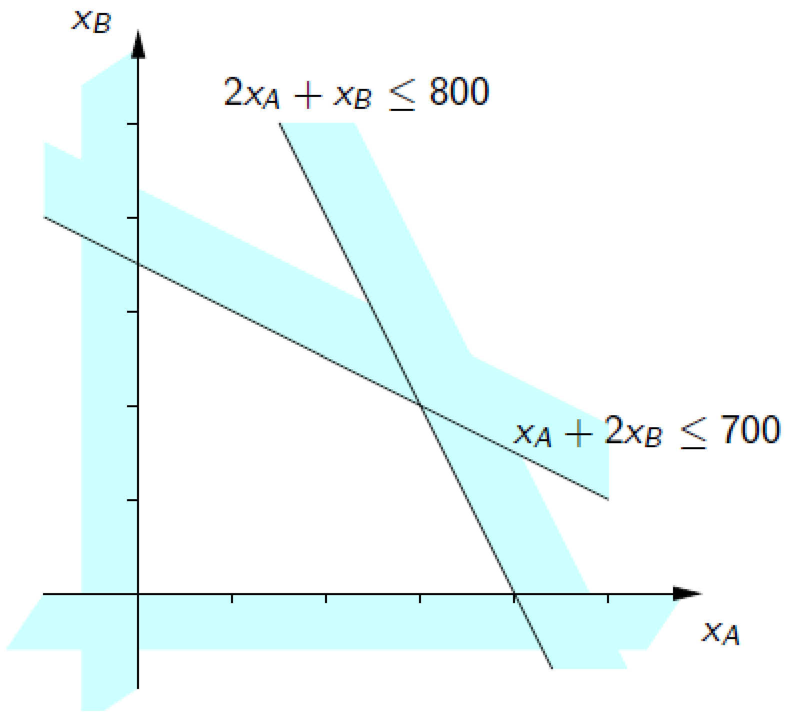
Exemple de la résolution graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



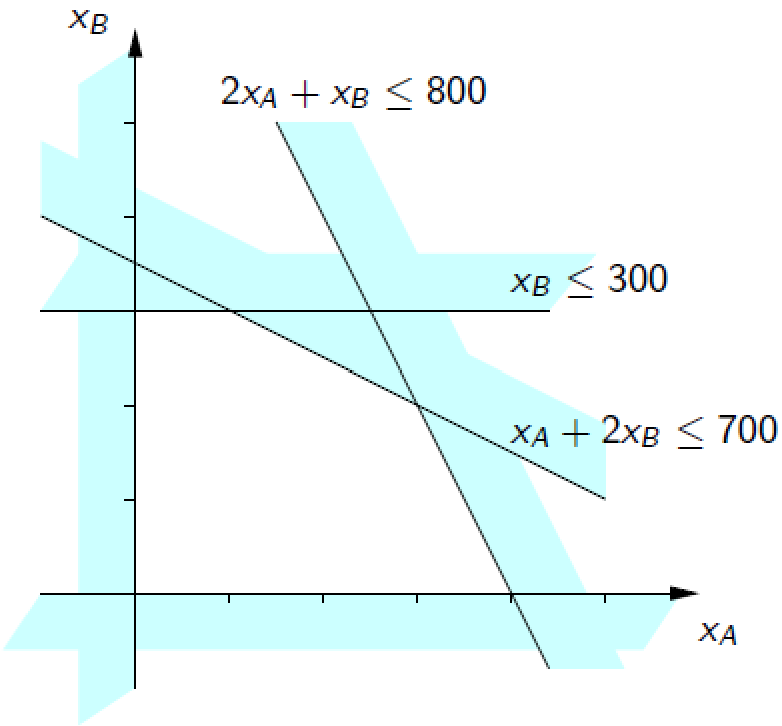
Exemple de la résolution graphique

$$\begin{array}{lrrl} \max & 4x_A + & 5x_B & \\ & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\ & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$



Exemple de la résolution graphique

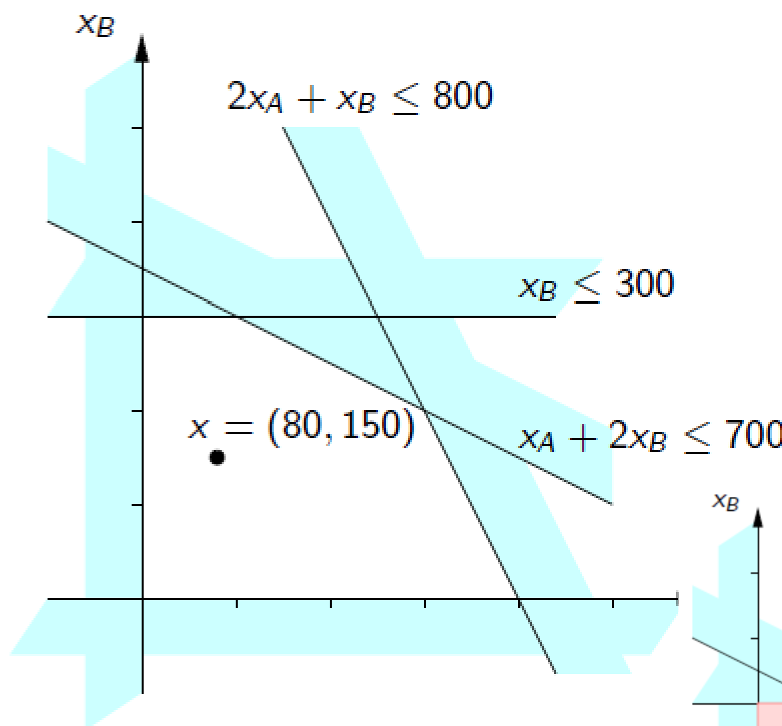
$$\begin{array}{lrrl}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}$$

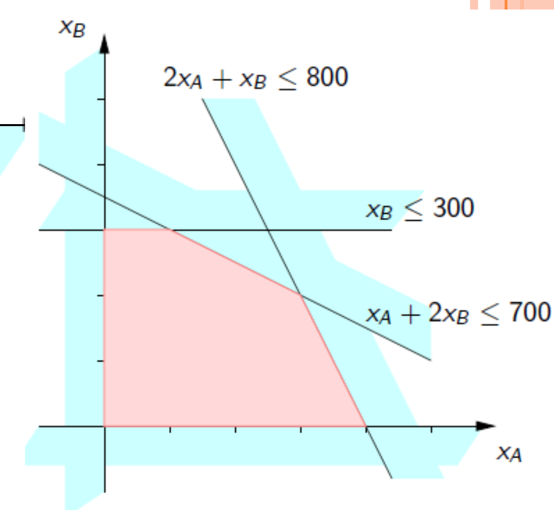


EXEMPLE DE LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Terminologie

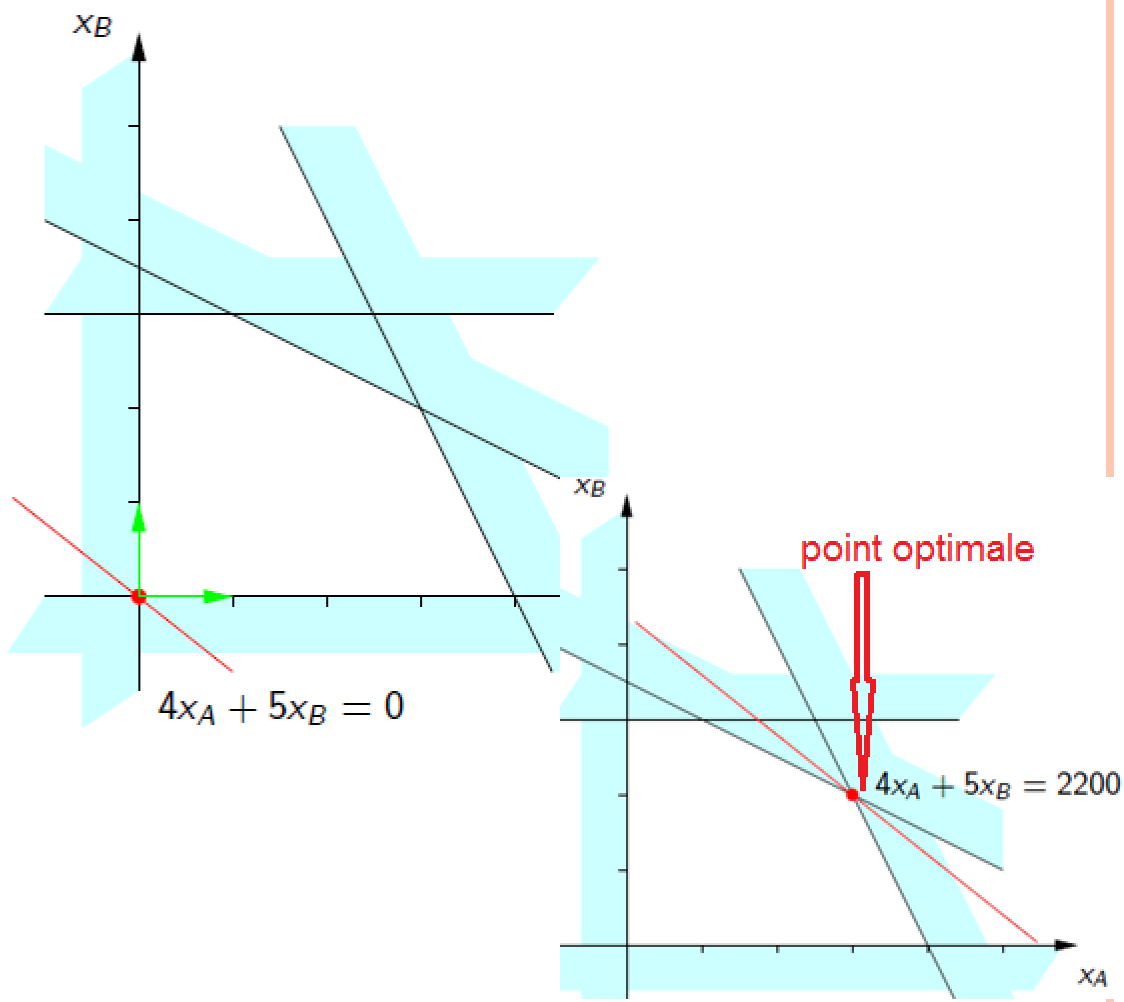
- **Solution :**
  affectation de valeurs aux variables
- **Solution réalisable :**
  solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes
- **Région réalisable :**
  ensemble des solutions réalisables.





EXEMPLE DE LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême **y** suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



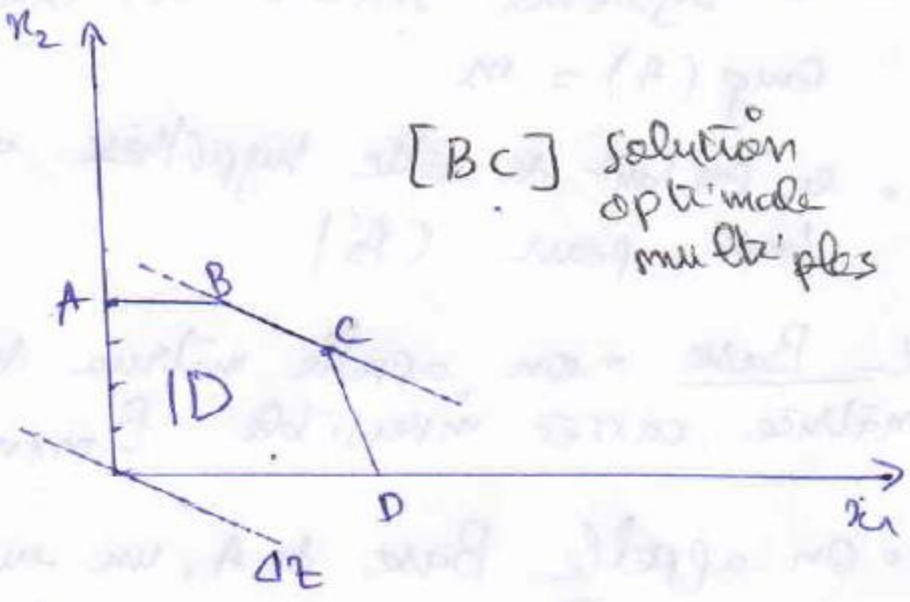
CAS PARTICULIERS

le problème discuté avant a une solution unique (B)
il est possible de rencontrer des situations différentes,
les trois cas particuliers les plus importants sont les suivants :

1- Solution multiples (infinité)
2- Solution non bornée.
3- Pas de solution réalisable

exemple 1

$$Pl_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$



Cas particuliers

<u>exemple 2</u>

en ajoutant $x_1+x_2 \geq 10$ au pl précédent

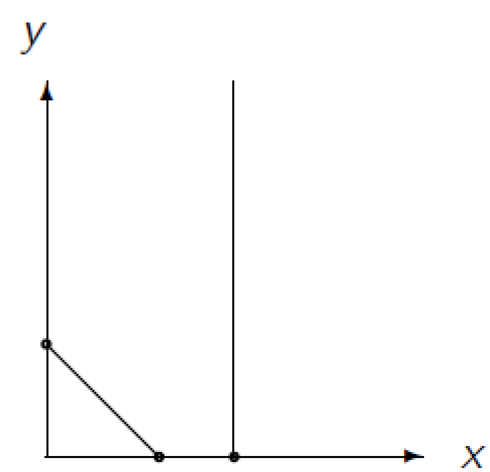
$$
pl_2 \begin{cases} 3x_1+x_2 \leq 15 \\ \left.\begin{array}{l} x_1+2x_2 \leq 10 \\ x_1+x_2 \geq 10 \end{array}\right\} \text{contradiction} \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \text{Max } z = 3x_1+4x_2 . \end{cases}
$$

n'admet pas de solution réalisable donc plus de solution optimale.

<u>exemple 3</u>

$$
\begin{aligned} \max x + 2y \\ \text{s.t. } x \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}
$$

Solution non bornée.



RÉSOLUTIONS ANALYTIQUE

-SOLUTIONS DE BASE

PL sous *forme standard* ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

Rappel : $\text{rang}(A)$ = nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes (=nombre max. de colonnes linéairement indépendantes).

Hypothèse de rang plein

On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\boxed{\text{rang}(A) = m \leq n}$.

- le système $Ax = b$ est dite de plein rang si $\text{rang}(A) = m$
- en partant de cette hypothèse on peut trouver au moin une base pour (Ps)

BASE ET HORS BASE

Définition (variables de base)

Soit $B \subset \{1, \cdots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\text{card}(B) = m$ tel que les colonnes A^j, $j \in B$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée A_B formée des colonnes A^j, $j \in B$, est inversible. On dit que l'ensemble B des indices est une base.

- Les variables $\mathbf{x}_B = (x_j,\ j \in B)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $\mathbf{x}_H = (x_j,\ j \notin B)$ sont appelées variables hors-base.

$$A = (A_B |\ A_H) \text{ où } A_H \text{ est la matrice formée des colonnes } A^j,\ j \notin B$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}.$$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à

$$A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H = \mathbf{b}.$$

Propriétés des solutions de base

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est une solution de base ________ alors $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$.

Remarque. Il y a *au plus* C_n^m solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

- Solutions de base réalisables et dégénérées

- une solution de base est dite réalisable si $X_B = (A_B)^{-1} \cdot b \geq 0$
- une solution de base est dite dégénérée si X_B a des composantes nulles.

Exemple. Problème de production de l'introduction.
Sous forme standard, le PL s'écrit

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On a $m = 3$, $n = 5$, $\text{rang}(A) = m = 3$. **Une base** est donnée par

$B = \{3,4,5\}$ avec $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **La solution de base réalisable**

correspondante est $\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^\top = (\underbrace{0, 0}_{\mathbf{x}_H}, \underbrace{81, 55, 20}_{\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}})^\top$.

Exemple d'enumeration des bases.

$$PL_S \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 9 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \\ \text{Max} Z = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

rang $(A) = 2$

(P_S) est de plein rang.

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Les bases de A sont les sous matrice inversible 2x2.

nombre de variables de base = 2

nombre de variables hors base = 4 - 2 = 2

on choisit 2 variables de base parmis les indices de colonne tel que A^J inversible.

$J_1 = \{1,2\} \Rightarrow A^{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A^{J_1}| = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow J_1$ base

$J_2 = \{1,3\} \Rightarrow A^{J_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $|A^{J_2}| = 0 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow J_2$ base

$J_3 = \{1,4\} \Rightarrow A^{J_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A^{J_3}| = 1 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow J_3$ base

$J_4 = \{2,3\} \Rightarrow A^{J_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ |A^{J_4}| = 0 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow J_4$ base

$J_5 = \{2,4\} \Rightarrow A^{J_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ |A^{J_5}| = 1 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow J_5$ base

$J_6 = \{3,4\} \Rightarrow A^{J_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |A^{J_6}| = 1 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow J_6$ base.

2) trouver les solutions de base realisables

$$X^J = (A^J)^{-1} \cdot b.$$

$$X^{J_1} = (A^{J_1})^{-1} \cdot b.$$

$$(A^{J_1})^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tq } A^{J_1^{-1}} \cdot A^{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & a+b \\ c+2d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=0 \Rightarrow a=-b \\ c+2d=0 \Rightarrow c=-2d \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \\ d=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

$$x^{J_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow x^{J_1} \text{ est solution de base réalisable}$$

- de la même façon, on trouve ttes les autres solutions de base
- dans cette exemple, on ne peut pas visualiser le polyèdre en 4 dimension mais le convexe (CV) pour la résolution graphique en est une projection graphique à deux dimensions (x_1, x_2).

le tableau

On résume toutes les solutions de base dans le tableau suivant

Bases	points	coordonnées x_1	x_2	e_1	e_2	Z max
$J_1\{1,2\}$	B	2	5	0	0	16
$J_2\{1,3\}$	A	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{27}{2}$
$J_3\{1,4\}$	n'est pas réalisable	7	0	0	-5 <0	X
$J_4\{2,3\}$	n'est pas réalis	0	9	-2 <0	0	X
$J_5\{2,4\}$	C	0	7	0	2	
$J\{3,4\}$	O	0	0	-	-	0

Les bases réalisables correspondent aux points extremaux du polyèdre OADC

Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.

Théorème

- $\mathbf{x}$ est une solution de base réalisable si et seulement si $\mathbf{x}$ est un sommet de $\mathcal{D}_R$.
- L'optimum de la fonction objectif F sur $\mathcal{D}_R$, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_R$.

Tout se passe donc avec les solutions de base : pour résoudre un PL sous forme standard, **il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables** (les sommets de $\mathcal{D}_R$).

PL sous orme canonique par rapport à une base J

un programme linéaire est écrit sous forme canonique par rapport à une base J noté PL (SFC%J) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) A^J est Unitaire à 1 permutation près

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $c^J = 0$.

Exemple PL SFC%J

$$P_S = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 10x_1 + 5x_2 = z\ \max \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$\mathrm{rang}(A) = 2.$

$J = \{3, 4\}$ est une base

$$A^J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10, & 5, & 0, & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$C^J = (0, 0)$ dans P_S SFC%J

Algorithme de Pivotage

pivot

Données : m, n, r, s

données modifiés : A

pour j : 1, ..., n faire

$A_r^j = \dfrac{A_r^j}{A_r^s}$ (on divise la ligne de pivot sur le pivot)

Fin;

pour i : 1 ... m , $i \neq r$

$A_i^j = A_i^j - A_i^s \cdot A_r^j$

fin;

Fin.

A_r^s : pivot choisit

APPLICATION DE ALGORITHME

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 120 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix}$$

effectuer $\hat{A} =$ pivotage $(2, 5, 1, 1)$

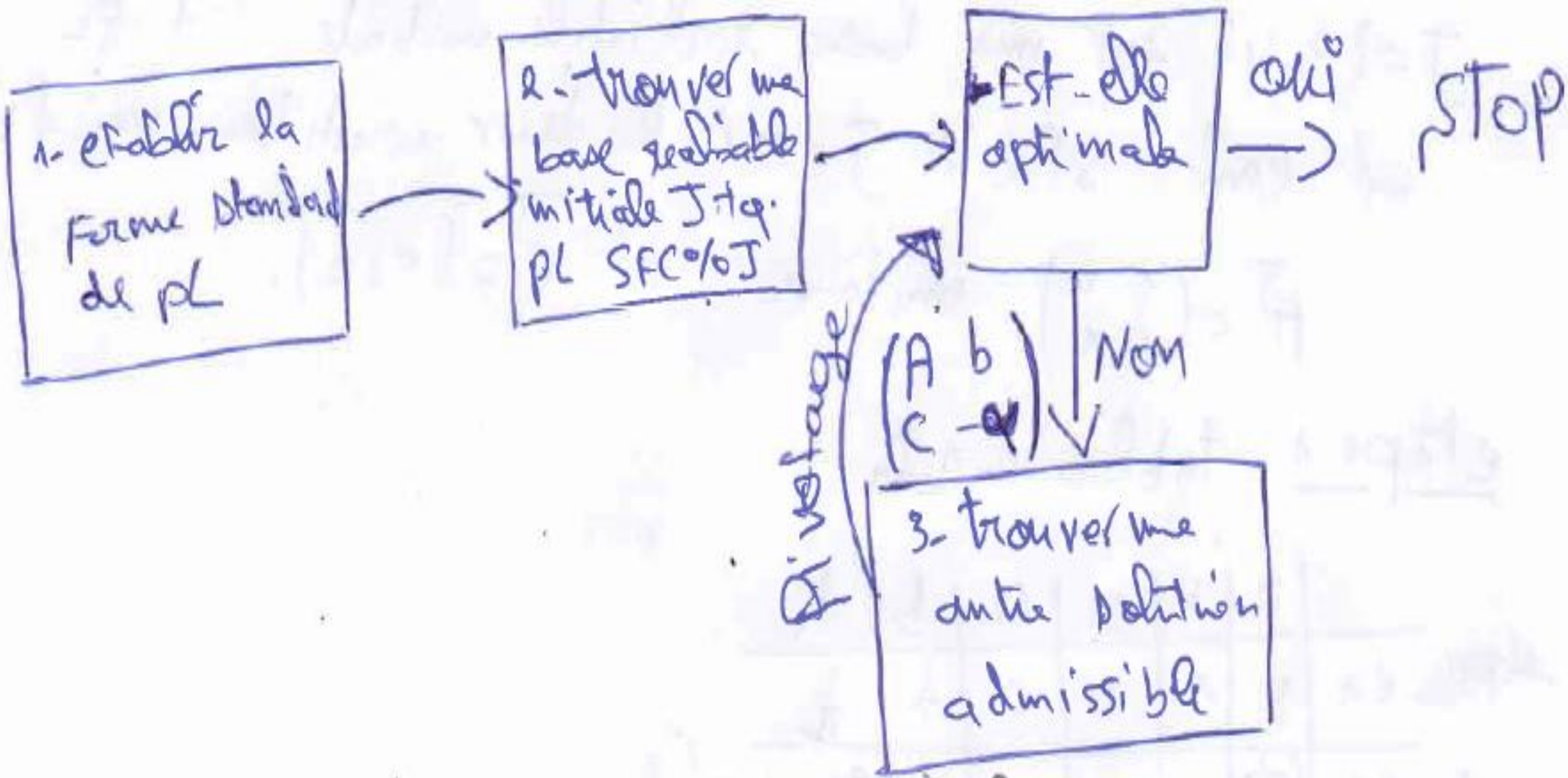
$A_1^1 = 3 \neq 0$ pivot

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 40 \\ 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & 1 & -100 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1/3 \\ -5L_1 + L_2 \end{array}$$

MÉTHODE DE RÉSOLUTION PAR L'ALGORITHME DE DU SIMPLEXE PRIMAL

L'**algorithme** **du** **simplexe** est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig à partir de 1947.cette méthode simple , efficace, robuste permet d'attaquer avec succès des problèmes comportant plusieurs dizaines des milles de variables et contraintes .à ce jours plusieurs méthodes de résolutions coexistent souvent dans des logiciels commerciaux mais la méthode simplexe reste une des meilleurs alternatives disponibles pour la résolution de nombreux problèmes de PL

Principe de simplexe



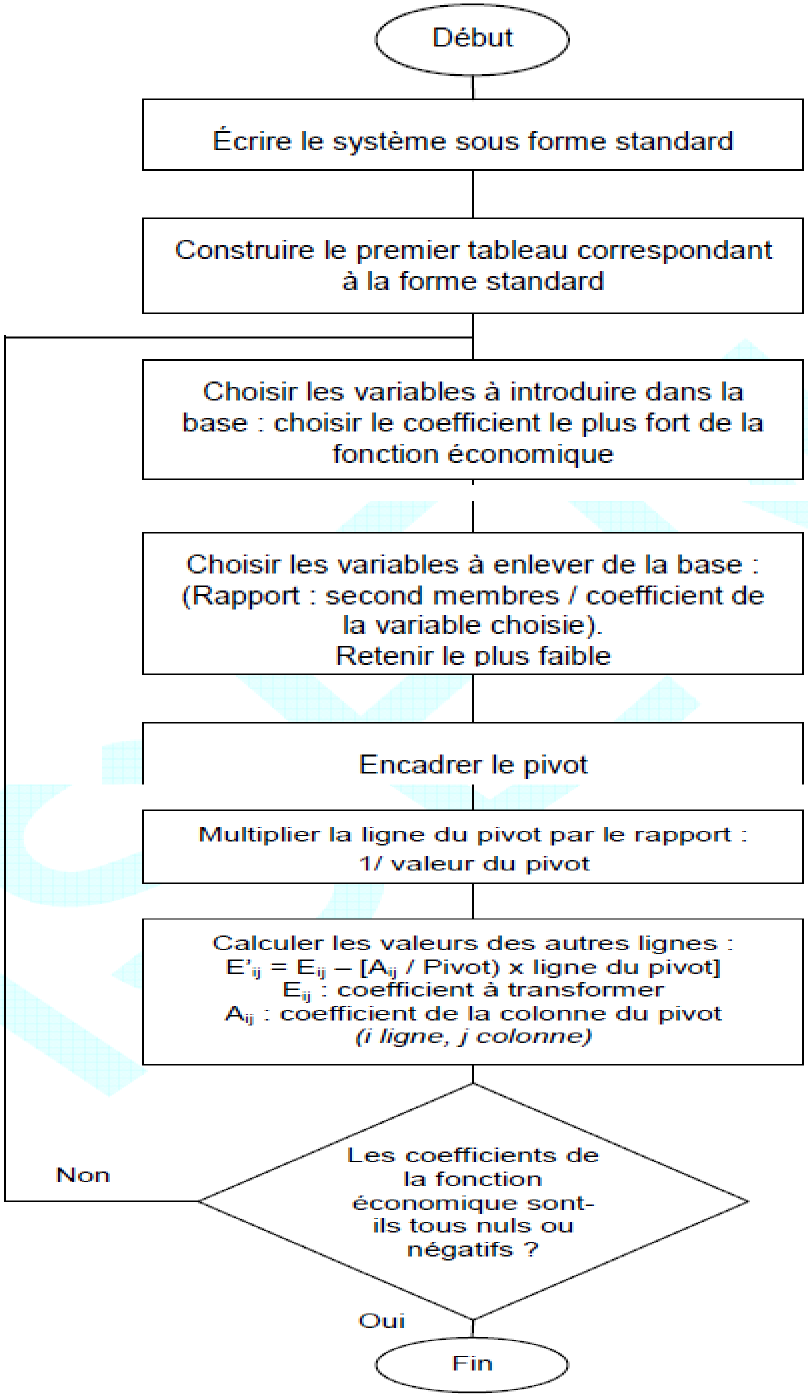
Description de la méthode simplexe

- 4/ Analytiquement parlant, la méthode de simplexe procède par itérations successives et permet d'améliorer la résolution de la fonction objectif à chaque itération.
- avant de pouvoir démarrer l'exécution de la méthode, il est nécessaire de disposer d'une solution de base réalisable initiale J t.q PL est SFC % J
- à chaque itération le PL est écrit (SFC % nouvelle base) réalisable
- cette transformation repose sur la sélection d'une variable entrante et une variable sortante.
- cette procédure se termine si la base courante est optimale.

DESCRIPTION DE LA MÉTHODE SIMPLEXE

B/ géométriquement parlant, elle consiste partant d'un point external du polyèdre, à passer d'un point externale $\bar{X}$ à un autre point $\bar{X'}$ tel que $f(\bar{X'}) \geq f(\bar{X})$ pour un pb max où $\bar{X}$ et $\bar{X'}$ se trouvent sur la même arrête, si D est borné on atteint en générale la solution X^* optimale en un nombre fini d'itterations.

Algorithme de simplexe



Application pour un problème Max

Application

La résolution par l'algorithme du simplex se déroule selon 8 étapes avant un nouveau passage.

1ère étape : Écrire le système sous forme standard

Il s'agit convertir le programme établi sous forme canonique (système d'inéquation) sous la forme standard (système d'équation avec variable d'écarts). Les variables d'écart introduites au cours de cette transformation représentent les contraintes techniques et commerciales disponibles qu'il convient de saturer.

Forme canonique

$$\begin{cases} 3x+2y \le 1800 \\ x \le 400 \\ y \le 600 \\ x \ge 0 \text{ et } y \ge 0 \\ MaxB = 30x+50y \end{cases}$$

Forme standard

e_1, e_2, e_3 représentant les variables d'écart

$$\begin{aligned} 3x+2y+e_1 &= 1800 \\ x + e_2 &= 400 \\ y + e_3 &= 600 \\ x \ge 0 \text{ et } y \ge 0 \quad & e_1, e_2, e_3 \ge 0 \\ MaxB &= 30x+50y \end{aligned}$$

n=5, m=3, rang(A) =3 plein rang alors on peut trouver au moin une base

B(3,4,5) base car $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible, $C_B=(0,0,0)$ alors le PL est SFC%B

$2^{ème}$ étape : Construire le premier tableau correspondant à la forme standard

Coefficient E_{ij}

(Zone verte)

Variables d'écart

Valeur en base
(encadré bleu)

Valeur solutions
(encadré orange)

	x	y	e_1	e_2	e_3	
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
e_3	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

Fonction économique
(zone jaune)

$3^{ème}$ étape : Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient Positif le plus fort de la fonction économique

Le coefficient de la fonction économique (MAX) est 50. Ainsi il s'agit de la variable y (encadré rouge) qui rentre en base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
e_3	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

Fonction économique ⇨

$4^{ème}$ étape : Choisir la variable à enlever de la base (rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible Positif

Le second membre (encadré vert), nous retenons la valeur la plus faible (en orange) du rapport second membre (en vert)/coefficient de la variable choisie (en bleu clair). Ainsi la variable e_3 (encadré violet) est la variable à enlever de la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	$2^{ème}$ membre	
e_1	3	2	1	0	0	1800	1800/2 = 900
e_2	1	0	0	1	0	400	400/0 = ∞
e_3	0	1	0	0	1	600	600/1 = 600
MAX	30	50	0	0	0	0	

5ème étape : Encadrer le pivot.

Le pivot est égal à 1(encadré en bleu)

E_{ij} A_{ij}

ligne du pivot ⇨

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
y	0	$\boxed{1}$	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

pivot

colonne du pivot

6ème étape : Multiplier la ligne du pivot par le rapport : 1 / valeur du pivot (ou diviser la ligne du pivot par le pivot)

E'_{ij}

	x	y	e_1	e_2	e_3	2eme membre
e_1						
e_2						
y	0	1	0	0	1	600
MAX						

1/pivot

7ème étape : Calculer les valeurs des autres lignes

$$E'_{ij} = E_{ij} - [(A_{ij} / \text{Pivot}) \times \text{Ligne du pivot}]$$

Cette opération consiste à transformer E_{ij} des autres lignes en E'_{ij}, nous effectuons un calcul matriciel.

1ère ligne

3 = 3 – [(2/1) x 0]
0 = 2 – [(2/1) x 1]
1 = 1 – [(2/1) x 0]
0 = 0 – [(2/1) x 0]
- 2 = 0 – [(2/1) x 1]
600 = 1 800 – [(2/1) x 600]

2ème ligne

1 = 1 – [(0/1) x 0]
0 = 0 – [(0/1 x 1]
0 = 0 – [(0/1 x 0]
1 = 1 – [(0/1 x 0]
0 = 0 – [(0/1 x 1]
400 = 400 – [(0/1 x 600]

4ème ligne

30 = 30 – [(50/1) x 0]
0 = 50 – [(50/1) x 1]
0 = 0 – [(50/1) x 0]
0 = 0 – [(50/1) x 0]
- 50 = 0 – [(50/1) x 1]
- 30 000 = 0 – [(50/1) x 600]

		x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
1ère ligne	e_1	3	0	1	0	-2	600
2ème ligne	e_2	1	0	0	1	0	400
ligne du pivot	y	0	1	0	0	1	600
4ème ligne	MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

8ème étape : Les coefficients de la fonction économique sont ils tous nuls ou négatifs ? (si oui nous sommes à l'optimum, si non nous effectuons un nouveau passage)

Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatifs (30) il convient d'effectuer un nouveau passage.

Nouveau passage :

- ✓ Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique.

Le coefficient de la fonction économique (MAX) est 30. Ainsi il s'agit de la variable x (encadré rouge) qui rentre en base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
e_1	3	0	1	0	-2	600
e_2	1	0	0	1	0	400
y	0	1	0	0	1	600
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

- ✓ Choisir la variable à enlever de la base (rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.

Le second membre (encadré vert), nous retenons la valeur la plus faible (en orange) du rapport second membre /coefficient de la variable choisie (encadré rose). Ainsi la variable e_1 (encadré marron) est la variable à enlever de la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre	
← e_1	3	0	1	0	-2	600	600/3 = 200
e_2	1	0	0	1	0	400	400/1 = 400
y	0	1	0	0	1	600	600/0 = ∞
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000	

- ✓ Le pivot est égal à 3 (encadré en vert foncé)
- ✓ Multiplier la ligne du pivot par 1/3 (ou diviser la ligne du pivot par le pivot : 3)
- ✓ Calculer les autres de valeur des lignes

$2^{ème}$ ligne

0 = 1 – [(1/3) x 3]
0 = 0 – [(1/3) x 0]
- 1/3 = 0 - [(1/3) x 1]
1 = 1 - [(1/3) x 0]
2/3 = 0 - [(1/3) x -2]
200 = 400 - [(1/3) x 600]

$3^{ème}$ ligne

0 = 0 – [(0/3) x 3]
1 = 1 – [(0/3) x 0]
0 = 0 – [(0/3) x 1]
0 = 0 – [(0/3) x 0]
1 = 1 – [(0/3) x -2]
600 = 600 – [(0/3) x 600]

$4^{ème}$ ligne

0 = 30 – [(30/3) x 3]
0 = 0 – [(30/3) x 0]
- 10 = 0 – [(30/3) x 1]
0 = 0 – [(30/3) x 0]
- 30 = -50 – [(30/3) x -2]
- 36 000 = -30 000 – [(30/3) x 600]

		x	**y**	e_1	e_2	e_3	**2^{eme} membre**
ligne du pivot	**x**	1	0	1/3	0	-2/3	200
$2^{ème}$ ligne	e_2	0	0	-1/3	1	2/3	200
$3^{ème}$ ligne	**y**	0	1	0	0	1	600
$4^{ème}$ ligne	**MAX**	0	0	-10	0	-30	-36 000

Les coefficients de la fonction économique sont tous nuls ou négatifs, fin de l'algorithme du simplex. La solution qui rend optimal le programme de production est le suivant :

La marge sur coût variable maximum = 36 000 €, les quantités produites x = 200, y = 600, et on constate que la variable d'écart e_2 correspondant à la contrainte de marché de X n'est pas saturée. Nous aurions pu vendre 200 produits X de plus. Par contre $\mathbf{e_1}$ la variable d'écart traduisant la contrainte technique et $\mathbf{e_3}$ la variable d'écart correspondant à la contrainte commerciale du marché du produit y sont saturées.

Le critère d'arrêt

Nous arrêtons lorsque nous obtenons le critère d'optimalité. L'algorithme du simplexe s'arrête lorsque:

- **Coeff(Z)** ≤ 0 pour un problème de max
- **Coeff(Z)** ≥ 0 pour un problème de min

Cas particuliers de simplex

- Dégénérescence
- Infinité de solutions
- Solution infinie

Dégénérescence

5 une solution de base réalisable est dite dégénérée si une ou plusieurs variables de base sont nulles.

partant d'une telle base :

1. la fonction objectif peut ne plus croître à chaque itération (constante)

2. phénomène de cyclage peut apparaître c.a.d retomber sur une base déjà visité dans le passé.

La règle de Bland

Il ne peut y avoir cyclage lorsque à toutes itération effectuée à partir d'une base dégénérée, on choisit les variables entrantes et sortantes comme celles de plus petit indice parmi les candidats possibles.

* *critère d'entrée* : pour entrer dans la base, on choisit celle, parmi les variables dont le coût marginale est non négatif qui dotée de plus petit indice

* pour sortir de la base, on choisit celle des variables candidates dont l'indice est dotée de plus petit indice

exemple

appliquer la règle de bland pour résoudre PL

* établir forme standard.

$$PL \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 & x_1, x_2 \geq 0. \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ z\ max = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

soit $J = \{3, 4, 5\}$

$x_J = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0$ réalisable

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	k
x_3	2	1	1	0	0	8	4 ←
x_4	1	2	0	1	0	7	7
x_5	0	1	0	0	1	3	∞
z	4 ↑	5	0	0	0	$-\alpha = 0$	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	k
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
x_4	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3	←
x_5	0	1	0	0	1	3	
z	0	3 ↑	-2	0	0	-16	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
x_5	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1
z	0	0	-1	-2	0	-22

$\boxed{Z^* = 22}$

•Infinité de solutions

-Dans le cas d'un tableaux simplex optimale et vous avez trouver le coefficient de cout de l'une des variables hors base nul, donc ce programme linéaire admet une infinité de solutions réalisables optimales , la solution est la droite [M1,M2]

-Pour déterminer le point M1 et M2 suivre exemple suivant

Exo infinité solution

$\text{Max } Z = 2x + 4y$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$FS \begin{cases} \text{Max } Z : 2x + 4y \\ x + 2y + e_1 = 5 \\ x + y + e_2 = 4 \\ x, y, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\text{rang}(A) = 2$

$B(3,4) : A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$c_B = (0,0)$

$\Rightarrow$ PL est SFC % $B(3,4)$.

	x	y	e_1	e_2	b
e_1	1	2	1	0	5
e_2	1	1	0	1	4
c	2	4	0	0	$-z = 0$

	x	y	e_1	e_2	b	Ratio
y	1/2	1	1/2	0	5/2	5
e_2	1/2	0	-1/2	1	3/2	3
c	0	0	-2	0	$-z = -10$	

le tableau est optimale et le cout de x une des variables hors bases est non nulle alors il existe une infinité de solution

$M_1 \left(0, \frac{5}{2}\right)$

~~Max~~

x va entrer et la variable qui a plus petit Ratio sort.

	x	y	e_1	e_2	b
y	0				1
x	1				3
	0				

$M_2 (3, 1)$

Solution est une droite $[M_1, M_2]$

Solution infinie

en cas où toutes les valeurs de la colonne du variable qui rentre en base sont negatives ou nulles, le pL ne se trouve pas delimité (non borné, et sa solution peut tjrs être ameliorée)

$$z^* = +\infty \ (Max)$$

$$z^* = -\infty \ (Min)$$

Rmq.

afin d'utiliser la méthode simplexe, les termes bi de chaque equation doivent être non ~~[illegible]~~ negatives, si certains des contraintes presentent un terme $bi < 0$, il faudra la multiplier par (-1).

MÉTHODE DE DEUX PHASES

Elle est utilisé lorsque le PL n'est pas écrit SFC%J initiale (impossible de trouver une base initiale)
Dans ce cas , il va falloir introduire des variables positives à la forme standard Vi qui son appelées des variables artificielles

Considérons le PL écrit sous forme standard

$$(P)\begin{cases} AX = b \\ CX = Z(\max) \\ X \geq 0 \end{cases}$$

-Associons à (P) le PL suivant: le programme PA est appelé programme linéaire auxiliaire associé à P

$$(PA)\begin{cases} AX + U_v = b \\ \sum_{i=1}^{n} V_i = \Psi(\mathrm{Min}) \\ V_i \geq 0, X \geq 0 \end{cases}$$

-

(PA) est écrit sous forme canonique % J={Vi}

ALGORITHME DE DEUX PHASES

- Phase 1

1. (P) écrit sous forme standard
2. Multiplier par -1 toutes les équations pour lesquelles bi <0
3. Associer à (P) le programme linéaire auxiliaire (PA) .Dans le cas de contraintes du type ≥ ou du type = , en devra, en plus de soustraire une variable d'écart pour les contraintes de type ≥ ou du type = , ajouter une variable artificielle dans ces contraintes respectives.
4. Appliquer l'algorithme simplexe sur (PA)

   -si $\psi^* \geq 0$ alors terminer (P) n'a pas de solutions

   -si $\psi^* \leq 0$ alors (P) est écrit SFC% la base réalisable

Algorithme de deux phases

- Phase 2

On applique donc le simplexe sur (P) après avoir établir son écriture % la base réalisable

Exemple d'application de la méthode de deux phases

$$(P) = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 = w\ (\max) \\ x_{i,1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

(P) n'est pas écrit SFC % base réalisable ⇒ introduire des variables artificielles

$$(PA) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + v_1 = 6 \ \ldots\ldots (*1) \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + V_2 = 9 \ \ldots (*2) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x_i \geq 0 \\ \psi(\min) = v_1 + v_2 \quad\quad v_i \geq 0 \end{cases}$$

de (*1) $v_1 = 6 - 2x_1 - 2x_2 - x_3$

de (*2) $v_2 = 9 - x_1 - 3x_2 + x_3$

$\psi(\min) = v_1 + v_2 =$

$6 - 2x_1 - 2x_2 - \cancel{x_3} + 9 - x_1 - 3x_2 + \cancel{x_3} =$

$\boxed{15 - 3x_1 - 5x_2}$

$\psi(\min) = 15 - 3x_1 - 5x_2$

$\psi(\max) = 3x_1 + 5x_2 - 15$

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	b
v_1	2	2	1	1	0	6
v_2	1	3	-1	0	1	9
ψ max	3	5	0	0	0	+15

	x_1	x_2	x_3		v_2	b
x_2	1	1	$\frac{1}{2}$		0	3
v_2	-2	0	$-\frac{5}{2}$		1	0 ← dege
ψ max	-2	0	$-\frac{5}{2}$		0	0

dégenerésence

1) on applique la règle

2) de bland.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
s_1	2	2	1	1	0	6
s_2	1	3	-1	0	1	9
φ_{max}	3	5	0	0	0	$+16$

	x_1	x_2	x_3	s_2	b	θ
x_1	1	1	$1/2$	0	3	
s_2	0	2	$-3/2$	1	6	
φ_{max}	0	2	$-3/2$	0	6	

	x_1	x_2	x_3	b
x_1	1	0	$5/4$	0
x_2	0	1	$-3/4$	3
φ_{max}	6	0	6	0

$\psi^* = 0 \Rightarrow$ Tableau optimale

le programme (P)

peut s'écrire SFC % J {1,2}

comme suit :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{4} x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{4} x_3 \\ x_2 - \frac{3}{4} x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4} x_3 + 3 \\ W(max) = -2x_1 + 3x_2 \\ \boxed{W(max) = \frac{19}{4} x_3 + 9} \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	b
x_1	1	0	$\frac{5}{4}$	0
x_2	0	1	$-\frac{3}{4}$	3
W max	0	0	$\frac{19}{4}$	-9

				b
x_3	$\frac{4}{5}$	0	1	0
x_2	$\frac{3}{5}$	1	0	3
W_{max}	$-\frac{19}{5}$	0	0	-9

$W^* = 9$